المحاضرة النظرية السادسة

تمرين :

ليكن لدينا الدالة $f(x,y) = y^2 e^{-y(x+1)}$; $x,y \geq 0$

المطلوب :

① التحقق من كونه قانون احتمالي

يجب أن يتحقق

$$\left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y(x+1)} \, dx \, dy = 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty y^2 e^{-y} \left(\int_0^\infty e^{-yx} \, dx \right) dy$$

$$\Rightarrow = \int_0^\infty y^2 e^{-y} \left[-\frac{1}{y} e^{-yx} \right]_0^\infty dy$$

$$= \int_0^\infty y^2 e^{-y} \left[-\frac{1}{y} (e^{-\infty} - e^{0}) \right] dy$$

$$= \int_0^\infty y \, e^{-y} (1) \, dy = \Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$$

إذاً هي قانون احتمالي

② دراسة الاستقلال

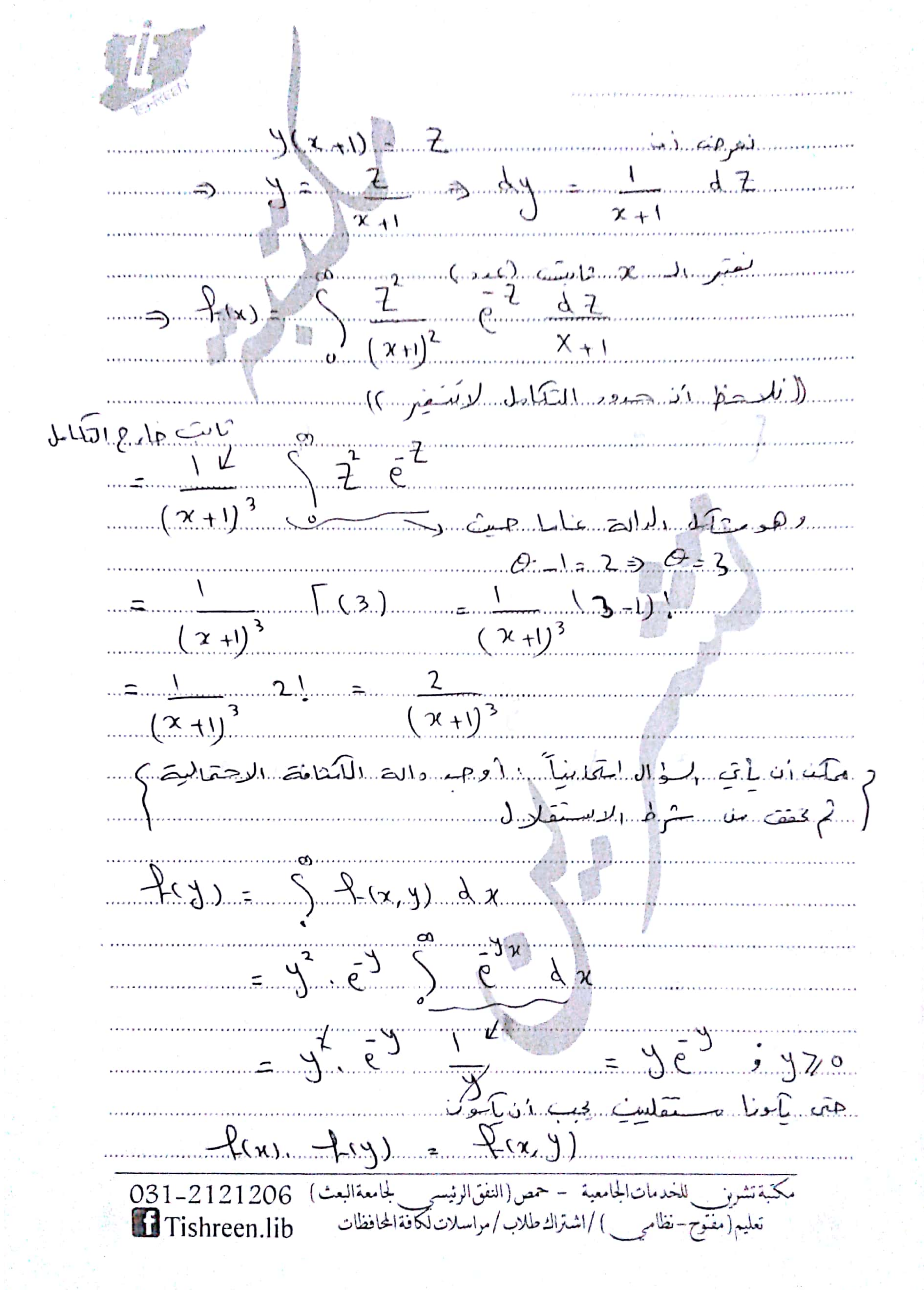
الكثافة الهامشية لـ x : $f(x) = \int_0^\infty f(x,y) \, dy$

المكاملة بالنسبة لـ y

أي إزالة الدوال التي تحوي x أي يجب أن يكون تابع لـ x

$$= \int_0^\infty y^2 e^{-y(x+1)} \, dy$$

من الأفضل إعادتها إلى الدالة غاما



نفرض أن $y(x+1) = z$

$$\Rightarrow y = \frac{z}{x+1} \Rightarrow dy = \frac{1}{x+1}\, dz$$

نعتبر الـ x ثابت (عدد)

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^\infty \frac{z^2}{(x+1)^2}\, e^{-z}\, \frac{dz}{x+1}$$

((نلاحظ أن حدود التكامل لا تتغير))

ثابت خارج التكامل

$$= \frac{1}{(x+1)^3} \int_0^\infty z^2 e^{-z}$$

وهو شكل الدالة غاما حيث $\alpha - 1 = 2 \Rightarrow \alpha = 3$

$$= \frac{1}{(x+1)^3}\,\Gamma(3) = \frac{1}{(x+1)^3}\,(3-1)!$$

$$= \frac{1}{(x+1)^3}\, 2! = \frac{2}{(x+1)^3}$$

{ممكن أن يأتي السؤال امتحانياً: أوجد دالة الكثافة الاحتمالية ثم تحقق من شرط الاستقلال}

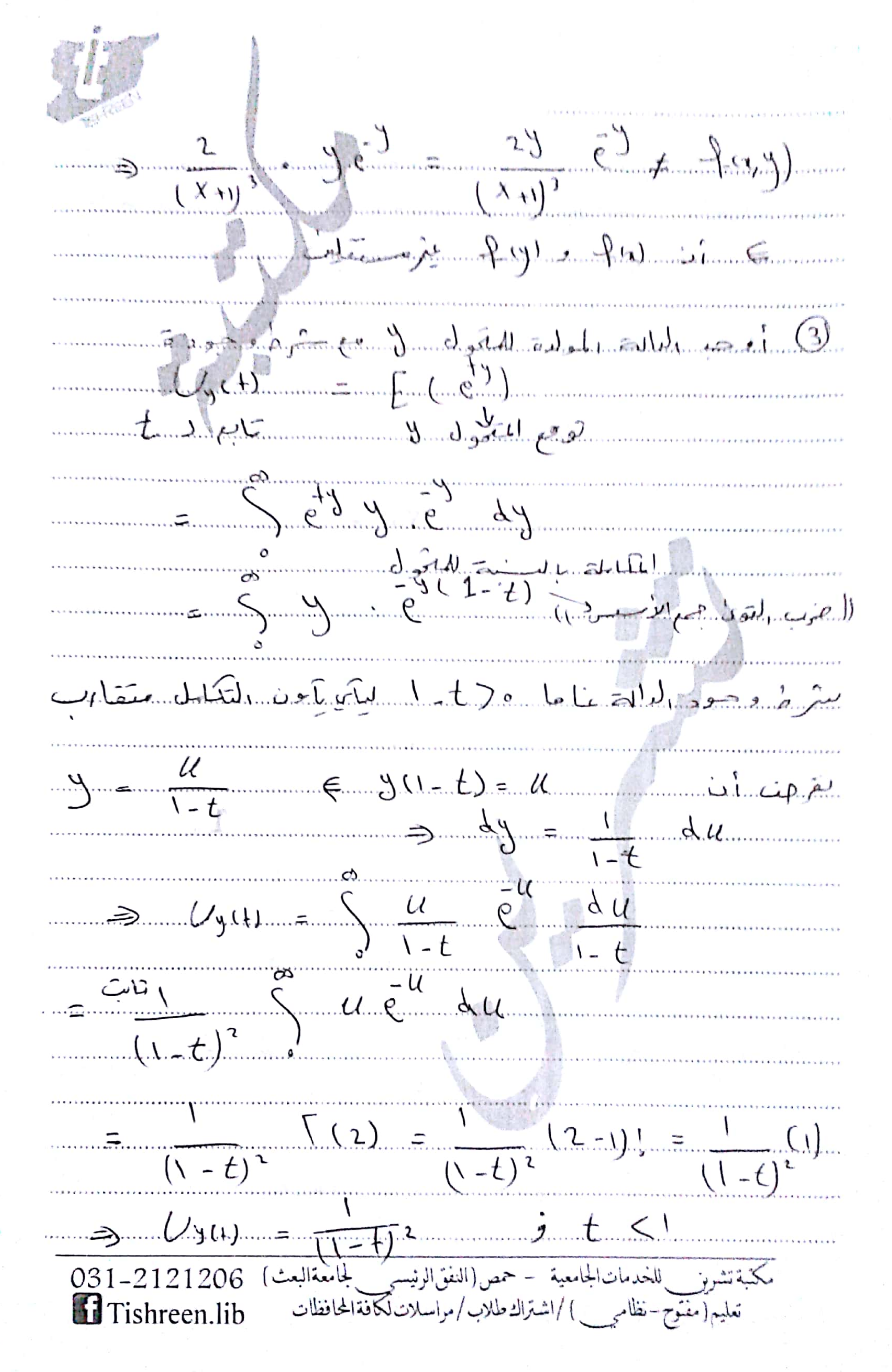
$$f(y) = \int_0^\infty f(x,y)\, dx$$

$$= y^2 . e^{-y} \int_0^\infty e^{-yx}\, dx$$

$$= y^2 . e^{-y}\, \frac{1}{y} = y e^{-y} \; ; \; y \geq 0$$

حتى يكونا مستقلين يجب أن يكون

$$f(x) . f(y) = f(x,y)$$



$$\Rightarrow \frac{2}{(x+1)^3} \cdot y e^{-y} = \frac{2y}{(x+1)^3} e^{-y} \neq f(x,y)$$

∴ أن $f(x)$ و $f(y)$ غير مستقلين

③ أوجد الدالة المولدة للعزوم لـ y مع شرط وجودها

$$U_y(t) = E(e^{ty})$$

تابع لـ t — نعوض المتحول y

$$= \int_0^\infty e^{ty}\, y\, e^{-y}\, dy$$

المكاملة بالنسبة للمتحول

$$= \int_0^\infty y \cdot e^{-y(1-t)}$$ (الضرب القوى جمع الأسس)

شرط وجود الدالة عندما $1-t>0$ ليكون التكامل متقارب

نفرض أن $y(1-t) = u \Rightarrow y = \frac{u}{1-t}$

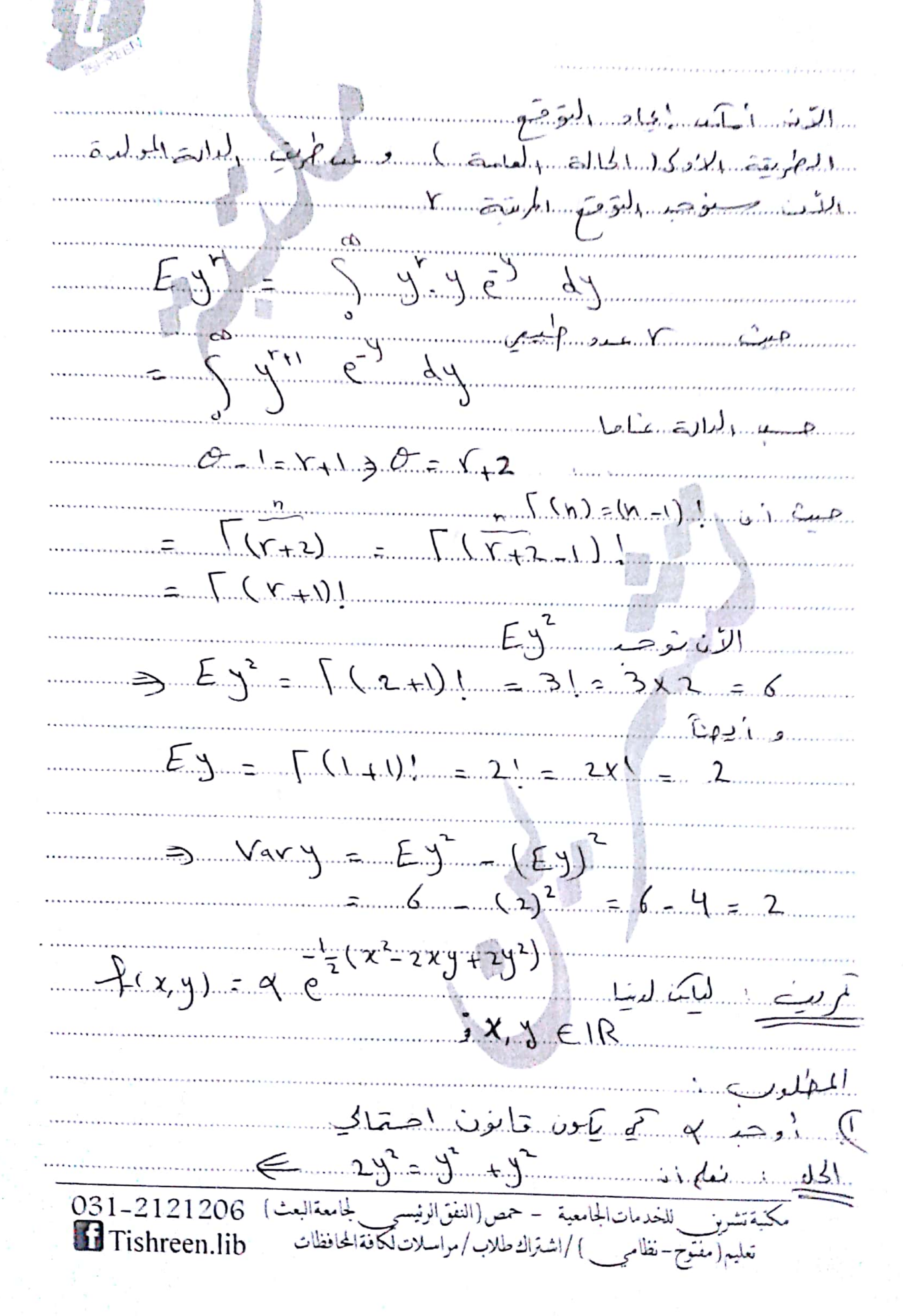
$$\Rightarrow dy = \frac{1}{1-t}\, du$$

$$\Rightarrow U_y(t) = \int_0^\infty \frac{u}{1-t}\, e^{-u}\, \frac{du}{1-t}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^\infty u\, e^{-u}\, du$$ (ثابت)

$$= \frac{1}{(1-t)^2}\, \Gamma(2) = \frac{1}{(1-t)^2} (2-1)! = \frac{1}{(1-t)^2} (1)$$

$$\Rightarrow U_y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \quad ; \quad t < 1$$



الآن أساس إيجاد التوقع

الطريقة الأولى (الحالة العامة) وحسب طريقة الدالة المولدة

الآن سنوجد التوقع المرتبة r

$$E y^r = \int_0^\infty y^r . y e^{-y} \, dy$$

حيث r عدد طبيعي

$$= \int_0^\infty y^{r+1} e^{-y} \, dy$$

حسب الدالة غاما

$$\alpha - 1 = r+1 \Rightarrow \alpha = r+2$$

حيث أن $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$= \Gamma(r+2) = \Gamma(r+2-1)!$$

$$= \Gamma(r+1)!$$

الآن نوجد Ey^2

$$\Rightarrow Ey^2 = \Gamma(2+1)! = 3! = 3 \times 2 = 6$$

وأيضاً

$$Ey = \Gamma(1+1)! = 2! = 2 \times 1 = 2$$

$$\Rightarrow Var\, y = Ey^2 - (Ey)^2$$

$$= 6 - (2)^2 = 6 - 4 = 2$$

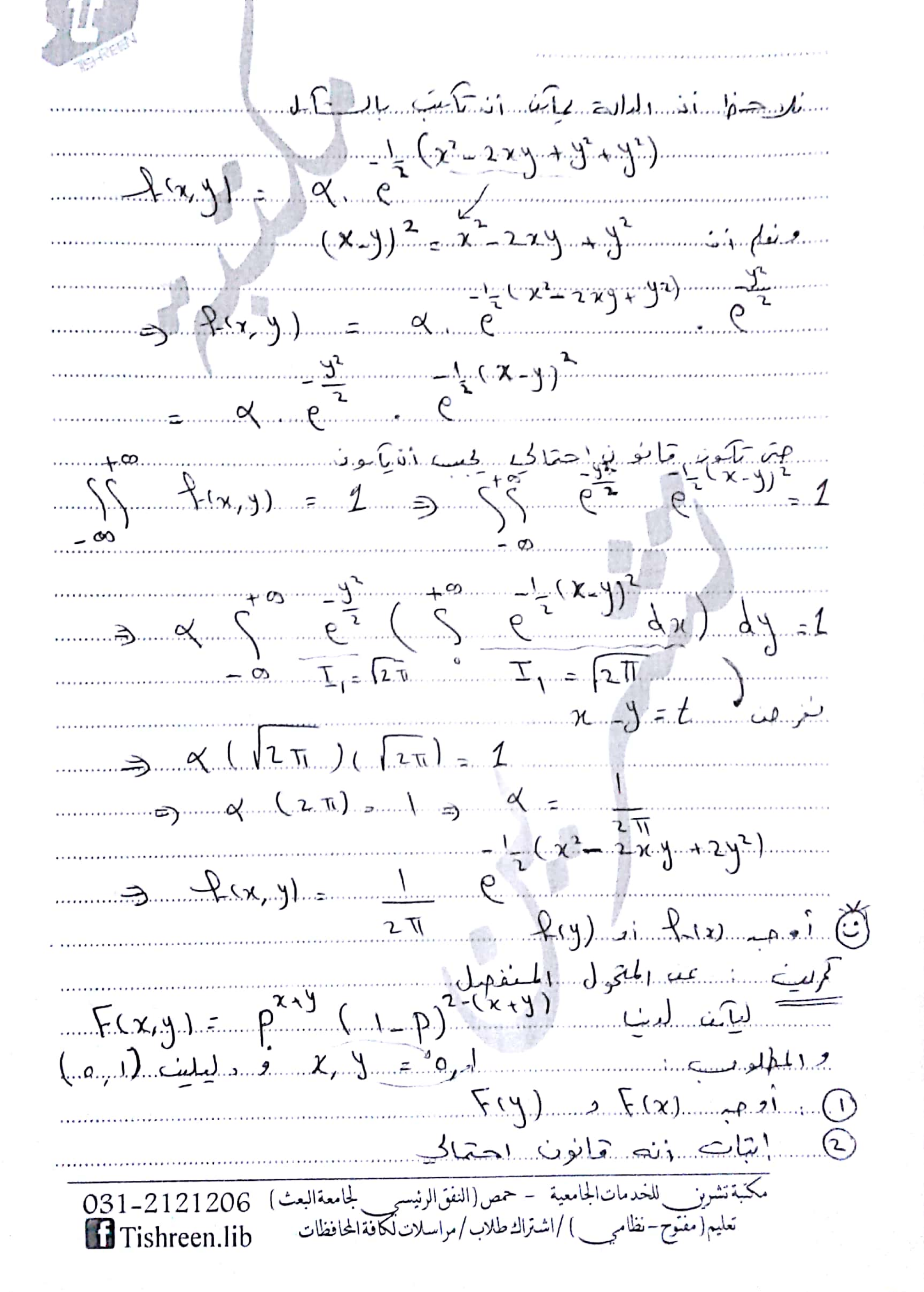
تمرين: ليكن لدينا

$$f(x,y) = \alpha \, e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 2y^2)} \; ; x, y \in \mathbb{R}$$

المطلوب:

1) أوجد α حتى يكون قانون احتمالي

الحل: نعلم أن $2y^2 = y^2 + y^2 \Leftarrow$



نلاحظ أن الدالة يمكن أن تكتب بالشكل

$$f(x,y) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+y^2)}$$

ونعلم أن $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

$$\Rightarrow f(x,y) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= \alpha \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2}$$

حتى تكون قانون توزيع احتمالي يجب أن يكون

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) = 1 \Rightarrow \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\int e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2} dx \right) dy = 1$$

$I_1 = \sqrt{2\pi}$ ، $I_1 = \sqrt{2\pi}$

نفرض $x - y = t$

$$\Rightarrow \alpha (\sqrt{2\pi})(\sqrt{2\pi}) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha (2\pi) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}$$

أوجد $f_1(x)$ و $f(y)$

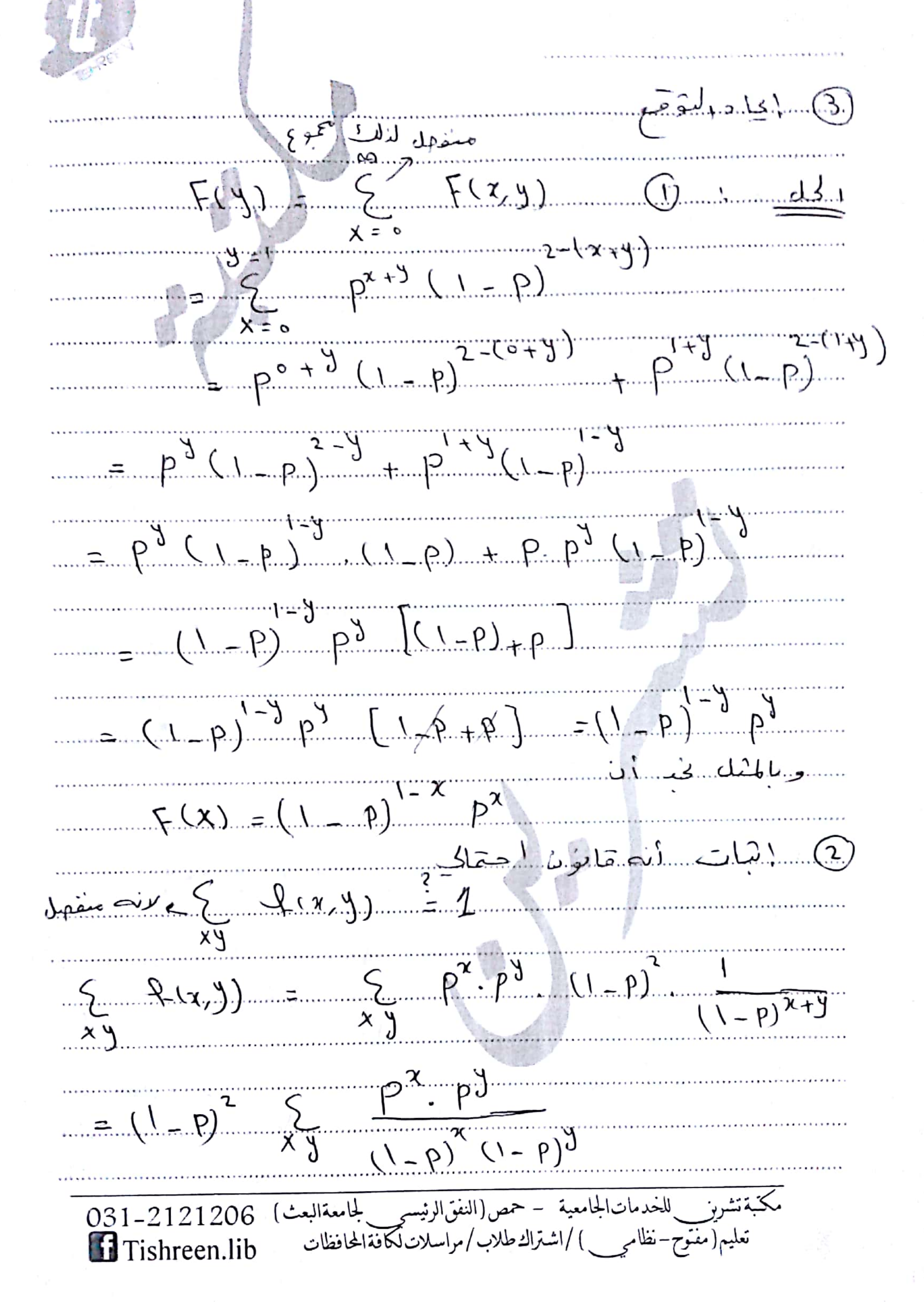
تمرين: عن المتحول المنفصل

ليكن لدينا $F(x,y) = p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)}$

والمطلوب: $x, y = 0$ أو 1 و ليكن $(0,1)$

① أوجد $F(x)$ و $F(y)$

② إثبات أنه قانون احتمالي



③ إيجاد التوقع

الحل: ①

منفصل لذلك مجموع

$$F(y) = \sum_{x=0} F(x,y)$$

$$= \sum_{x=0}^{y=1} p^{x+y}(1-p)^{2-(x+y)}$$

$$= p^{0+y}(1-p)^{2-(0+y)} + p^{1+y}(1-p)^{2-(1+y)}$$

$$= p^{y}(1-p)^{2-y} + p^{1+y}(1-p)^{1-y}$$

$$= p^{y}(1-p)^{1-y}.(1-p) + p.p^{y}(1-p)^{1-y}$$

$$= (1-p)^{1-y} p^{y}\left[(1-p)+p\right]$$

$$= (1-p)^{1-y} p^{y}\left[1-p+p\right] = (1-p)^{1-y} p^{y}$$

وبالمثل نجد أن

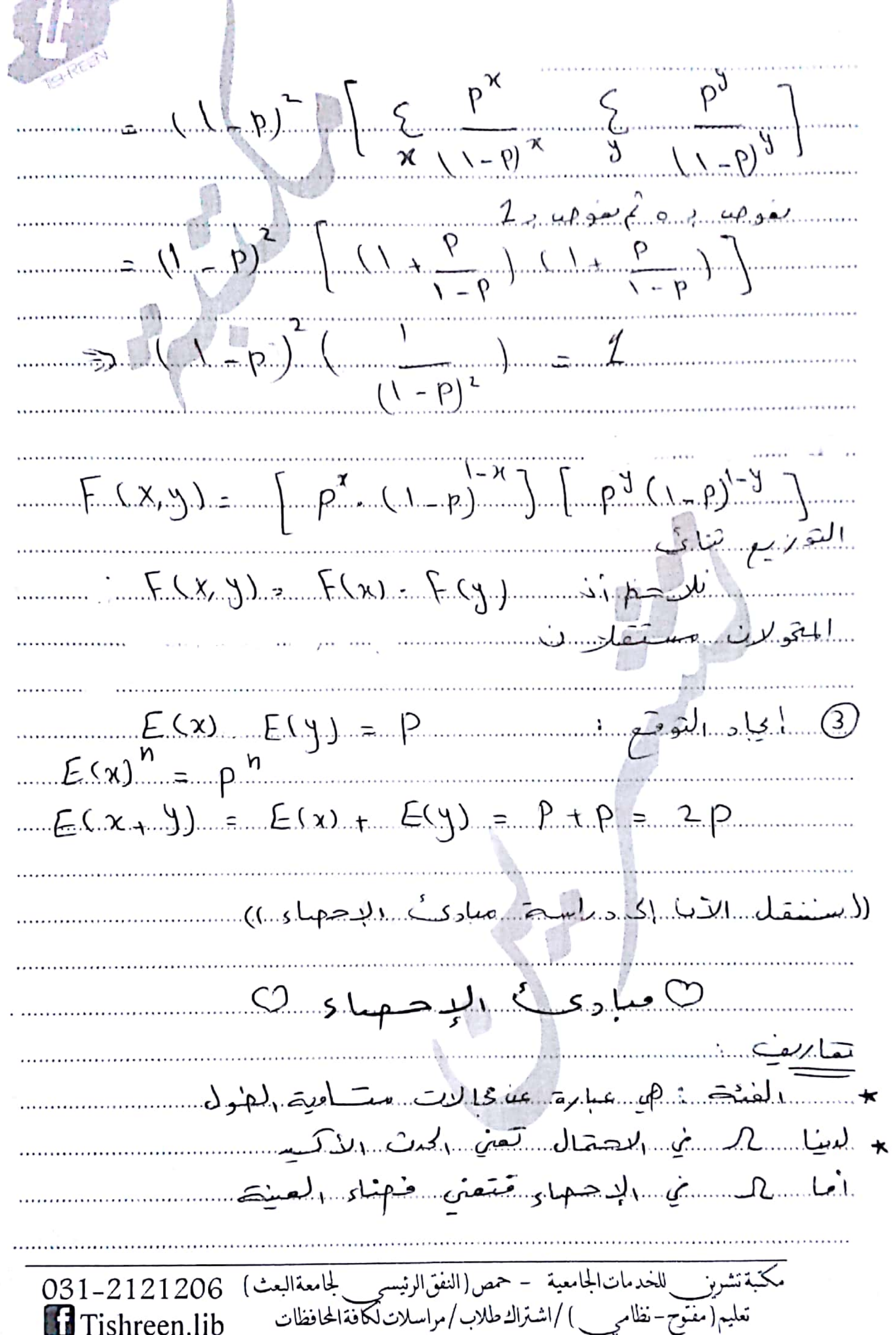
$$F(x) = (1-p)^{1-x} p^{x}$$

② إثبات أنه قانون احتمالي

$$\sum_{xy} f(x,y) \stackrel{?}{=} 1$$ لأنه منفصل

$$\sum_{xy} f(x,y) = \sum_{xy} p^{x}.p^{y}.(1-p)^{2}.\frac{1}{(1-p)^{x+y}}$$

$$= (1-p)^{2} \sum_{xy} \frac{p^{x}.p^{y}}{(1-p)^{x}(1-p)^{y}}$$



$$= (1-p)^2 \left[\sum_x \frac{p^x}{(1-p)^x} \sum_y \frac{p^y}{(1-p)^y} \right]$$

نعوض بـ 0 ثم نعوض بـ 1

$$= (1-p)^2 \left[\left(1+\frac{p}{1-p}\right)\left(1+\frac{p}{1-p}\right) \right]$$

$$\Rightarrow (1-p)^2 \left(\frac{1}{(1-p)^2}\right) = 1$$

$$F(x,y) = \left[p^x \cdot (1-p)^{1-x}\right]\left[p^y (1-p)^{1-y}\right]$$

التوزيع ثنائي

نلاحظ أن: $F(x,y) = F(x) \cdot F(y)$

المتحولان مستقلان

③ إيجاد التوقع: $E(x) = E(y) = p$

$E(x)^n = p^n$

$E(x+y) = E(x) + E(y) = p + p = 2p$

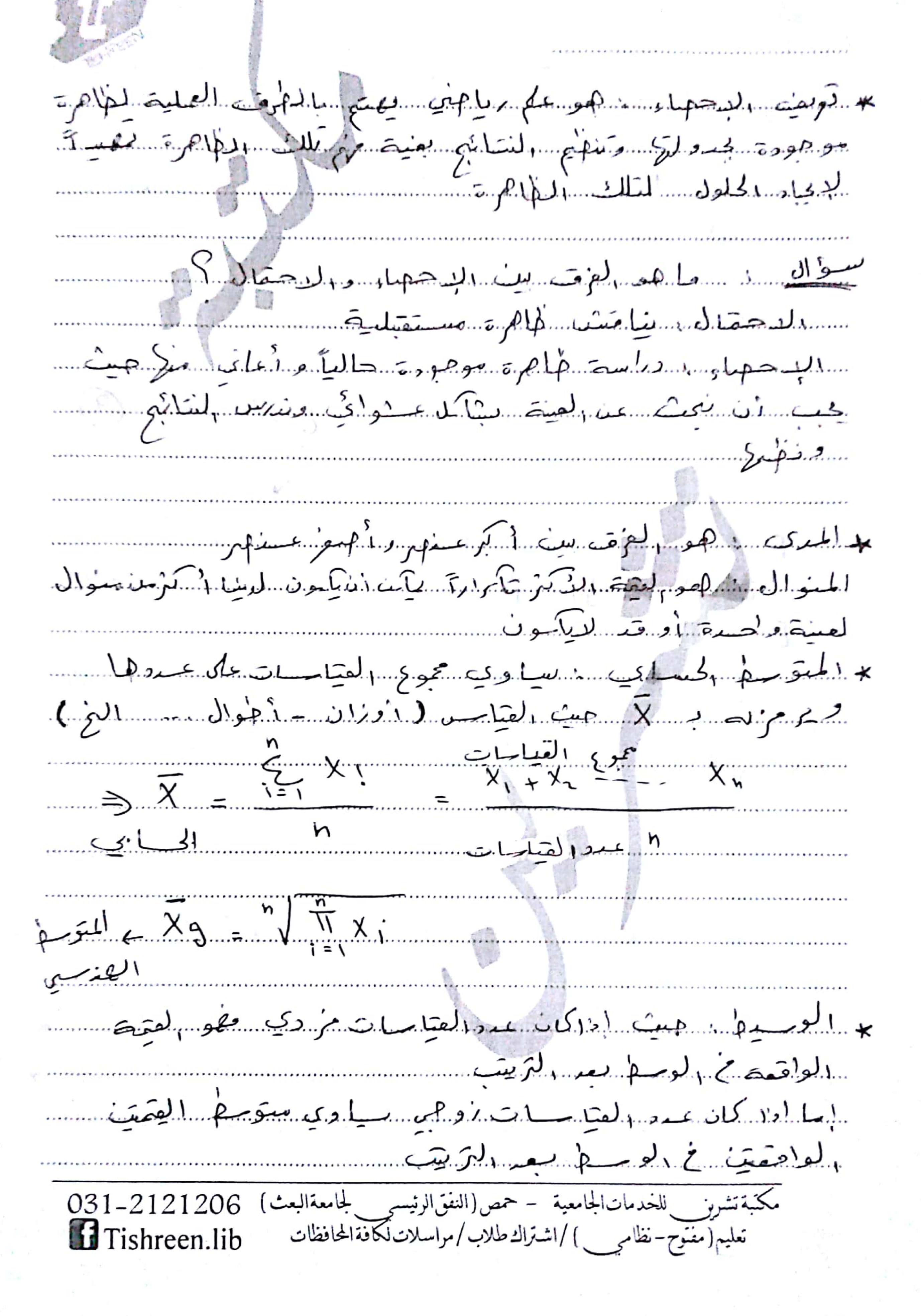
((سننتقل الآن إلى دراسة مبادئ الإحصاء))

♡ مبادئ الإحصاء ♡

تعاريف:

* الفئة: هي عبارة عن مجالات متساوية الطول
* لدينا Ω في الاحتمال تعني الحدث الأكيد

أما Ω في الإحصاء فتعني فضاء العينة



* تعريف الإحصاء : هو علم رياضي يهتم بالظروف العلمية لظاهرة موجودة بجدولتها وتنظيم النتائج بغية فهم تلك الظاهرة تمهيداً لإيجاد الحلول لتلك الظاهرة

<u>سؤال</u> : ما هو الفرق بين الإحصاء والاحتمال ؟

الاحتمال : يناقش ظاهرة مستقبلية

الإحصاء : دراسة ظاهرة موجودة حالياً وأعطي مثل حيث يجب أن نبحث عن العينة بشكل عشوائي وندرس النتائج ونطرح

* المدى : هو الفرق بين أكبر عنصر وأصغر عنصر

المنوال : هو القيمة الأكثر تكراراً يمكن أن يكون لدينا أكثر من منوال لعينة واحدة أو قد لا يكون

* المتوسط الحسابي : يساوي مجموع القياسات على عددها ويرمز له ب $\bar{X}$ حيث القياس (أوزان - أطوال ... الخ)

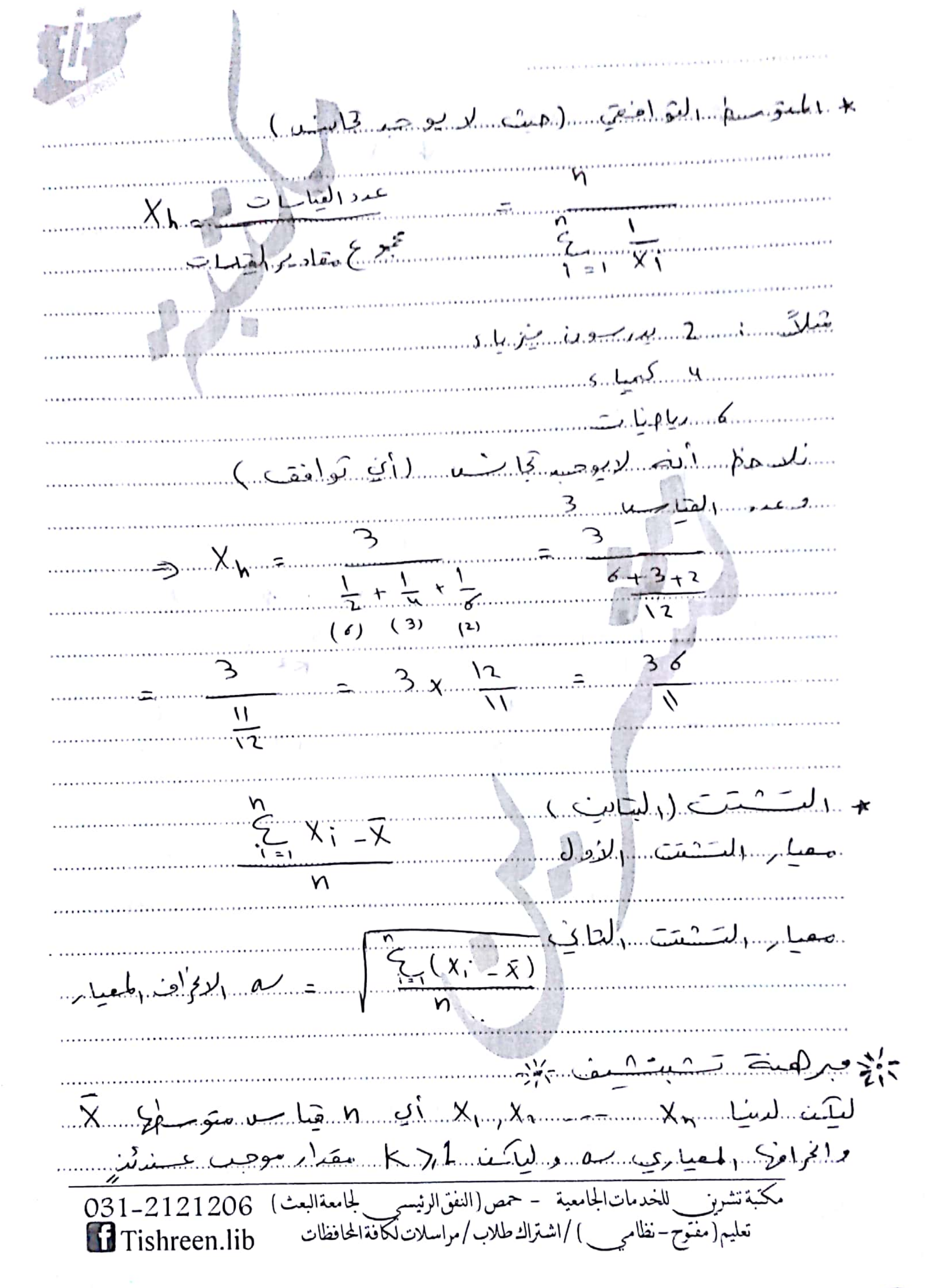
$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\overset{\text{مجموع القياسات}}{x_1 + x_2 \ldots x_n}}{\underset{\text{عدد القياسات}}{n}}$$

الحسابي

$$\bar{X}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$ ← المتوسط الهندسي

* الوسيط : حيث إذا كان عدد القياسات فردي فهو القيمة الواقعة في الوسط بعد الترتيب

إما إذا كان عدد القياسات زوجي يساوي متوسط القيمتين الواقعتين في الوسط بعد الترتيب



* المتوسط التوافقي (حيث لا يوجد تجانس)

$$X_h = \frac{\text{عدد القياسات}}{\text{مجموع مقادير القياسات}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$$

مثلاً: 2 بروسون فيزياء
4 كيمياء
6 رياضيات
نلاحظ أنه لا يوجد تجانس (أي توافق)
وعدد القياسات 3

$$\Rightarrow X_h = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{6+3+2}{12}}$$

(6) (3) (2)

$$= \frac{3}{\frac{11}{12}} = 3 \times \frac{12}{11} = \frac{36}{11}$$

* التشتت (التباين)

معيار التشتت الأول $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X}}{n}$

معيار التشتت الثاني

الانحراف المعياري $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})}{n}}$

مبرهنة تشبتشيف

ليكن لدينا $X_1, X_2, \ldots X_n$ أي n قياس متوسطها $\bar{X}$
والانحراف المعياري s وليكن $K \geq 1$ مقدار موجب عندئذٍ

يوجد على الأقل $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ من القياسات داخل المجال $[\bar{x} - k\sigma , \bar{x} + k\sigma]$

مثال

يوجد لدينا 800 شخص متوسط أوزانهم 76 kg والانحراف المعياري 8 kg ما هو المجال الذي يحوي على الأقل 600 شخص

الحل: حيث أنه لدينا

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)800 = 600$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{600}{800} \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow k^2 = 4$$

إما $k = 2$ أو $k = -2$

نأخذ $k = 2$ و $\bar{x} = 76$ و $\sigma = 8$ فيكون المجال

المجال هو $[76 - 2(8) , 76 + 2(8)]$

$[60 , 92]$

انتهت المحاضرة السادسة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

إعداد: فاطمة الشميني